

14 febbraio 2003

Istituzioni di Matematiche

per il c.l. in Scienze e Tecnologie per i Beni Culturali

(1) Siano $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow Z$ due applicazioni. Si dimostri che se f non è iniettiva oppure g non è suriettiva, allora $g \circ f$ non è biiettiva.

(2) Si calcolino i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos^2 x}{\operatorname{arctg}^2 x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x (1 - x \operatorname{sen} 1/x), \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{10^x - 10}{\ln^2 x}.$$

(3) Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ un'applicazione derivabile tale che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in [a, b]$.

- a) È vero che se $f(a) < 0$ allora anche $f(b) < 0$?
- b) È vero che se $f(b) < 0$ allora anche $f(a) < 0$?
- c) È vero che se $f(b) > 0$ allora $f(a) < 0$?

In caso affermativo si fornisca una breve dimostrazione, in caso negativo si presenti un controesempio.

(4) Si consideri la funzione

$$y = f(x) = (x - 1)e^{\frac{1}{x-1}}.$$

Se ne studino:

- dominio, segno, eventuali simmetrie;
- limiti significativi ed eventuali asintoti;
- derivata prima, crescita, eventuali punti di massimo e di minimo, attacchi;
- derivata seconda, convessità, eventuali punti di flesso;
- grafico.

(5) Si calcolino i seguenti integrali indefiniti:

$$\int (2x - 2) \ln(2 - x) dx, \quad \int (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) dx, \quad \int \frac{6 \operatorname{sen} x}{8 + \operatorname{sen}^2 x} dx.$$

(6) Si calcoli il volume del solido ottenuto per rotazione del trapezoide della funzione

$$y = \sqrt{\operatorname{arctg} x}, \quad x \in [0, 1]$$

attorno all'asse delle ascisse.